文章编号:1674-7070(2010)04-0357-04

基于五阶 WENO 有限差分法的运动界面追踪

卢长娜[1]　程冰[2]

摘要

针对处理运动界面问题的流体体积函数(VOF)法,给出了一种高分辨率的运动界面捕捉方法.该方法采用五阶高精度和高分辨率的加权本质无振荡(WENO)有限差分格式离散 VOF 函数的空间导数;采用四阶 Runge-Kutta 方法离散时间导数;采用 Local Lax-Friedrich 通量作为数值流通量.用该方法对旋转流场和剪切流场中的运动界面追踪,结果表明该方法有较好的适用性和精确性.

关键词

VOF;WENO 格式;有限差分法;运动界面

中图分类号 O351.2

文献标志码 A

0　引言

Introduction

在一个物理主场中,有一个运动的介质或间断面,它受物理或者化学、生物学的反应规律所制约,这个不断地在发展、变化和运动着的边界即为运动界面.生活中具有运动界面的流动广泛存在,它涉及到各种理论和技术领域的数值研究和应用,例如机械、能源、电子、动力、水利等,很多问题的关键在于运动界面的确定,因此准确地追踪运动界面位置是非常重要的.运动界面问题的提出和讨论可以追溯到一个多世纪以前,在研究运动界面的进程中,流体体积函数(Volume of Fluids,VOF)追踪方法是一种处理复杂运动界面的有效新方法[1-2],它以存储量小、应用简单精细而得到广泛应用.Hirt 等[3]提出了 VOF 法,文献[4-5]对 VOF 法做了进一步的发展和改进,使这一方法具有更广泛的适用性.

VOF 运动界面追踪方法一般包括两部分研究内容:根据给定流速及重构好的运动界面来确定下一时刻流体体积函数值,称之为运动界面捕捉;根据给定的流体体积函数值确定运动界面位置,称之为运动界面重构.本文主要针对界面捕捉方法做一些探讨.

在采用部分数值模拟方法对运动界面进行追踪计算的过程中,由于数值方法的数值耗散,或者说数值粘性的作用,常常经过几个或者十几个时间步长的计算,运动界面就会变得比较宽,甚至能够横跨好几个网格的宽度,这样得到的运动界面,对于进行数值研究并没有意义可言,因此有必要采用高分辨率的数值方法.随着 VOF 法的不断完善,目前已经有很多种比较成熟的高分辨率的界面追踪方法[6-7].WENO(Weighted Essentially Non-Oscillatory)格式是一种高阶和高分辨率数值方法,理论分析和数值试验证明 WENO 格式能基本无振荡地准确捕捉间断解,而且在光滑和间断区域能一致达到高精度,性能稳定,收敛性好.WENO 格式经过十几年的发展,取得了较大的进展,已经成为计算流体力学中一类重要的计算格式,得到了广泛的应用[8-10].

本文采用五阶精度的 WENO 有限差分格式,给出了一种高精度 VOF 运动界面捕捉方法.本文研究的运动介质为流体.

1　VOF 法

VOF method

VOF 方法的基本原理是通过研究网格单元内流体体积和网格体

收稿日期 2010-05-17

资助项目 国家自然科学基金(40906048);南京信息工程大学科研启动基金(90203)

作者简介

卢长娜,女,博士,讲师,主要从事水动力数值模拟、微分方程数值解方面的研究.luchangna@163.com

1　南京信息工程大学　数理学院,南京,210044

2　青岛农业大学　理学与信息科学学院,青岛,266109

积比值来确定自由面,追踪流体的变化,因此要在整个流场中定义一个函数 f. 在任意时刻,知道了这个函数在每个网格上的值,就可以通过某种途径重构出运动界面.

设计算区域是 Ω,流体所在的区域记为 Ω_1,定义这样一个函数:

$$\alpha(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega_1; \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega_1. \end{cases}$$

在流场中, $\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 满足守恒型方程

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x} + v\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

其中 $\boldsymbol{V} = (u,v)$ 是流体的速度场. 在每个网格 $I_{i,j}$(以矩形网格为例) 上定义 f_{ij} 为 $\alpha(\boldsymbol{x},t)$ 在网格上的积分:

$$f_{ij} = \frac{1}{\Delta I_{ij}} \int_{I_{ij}} \alpha(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}S,$$

称之为 VOF 函数. 同样它满足:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

称之为 VOF 方程.

容易看出每个单元上的流体体积函数实际上是

$$f = \frac{\text{单元中的流体体积}}{\text{单元体积}}.$$

显然,$f = 1$ 的网格充满流体,称之为流体网格;而 $f = 0$ 为空网格;满足 $0 < f < 1$ 的网格,则是含有流体界面的网格,称为边界网格. 在每个网格中的 f 值一旦求出,则可以根据 f 的值构造出运动界面. 根据某种规则和周边的网格的 f 值,可以计算运动界面的斜率等信息,给出运动界面更精确的描述.

2 WENO 重构

WENO reconstruction

VOF 方程(1)可以写成守恒型:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{\partial fv}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

令 $F = fu$, $G = fv$,则式(2)可写成:

$$f_t + F_x + G_y = 0. \tag{3}$$

本文对计算区域进行矩形网格剖分,网格单元记为 $I_{ij} \equiv \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right]$, $1 \leqslant i \leqslant N_x$, $1 \leqslant j \leqslant N_y$. 把单一矩形单元作为控制元,物理变量配置在每个单元的中心 (x_i, y_j),其中 $x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, $y_j = \frac{1}{2}\left(y_{j-\frac{1}{2}} + y_{j+\frac{1}{2}}\right)$. 为了计算简便,一般采用等距网格剖分. 有限差分法中,目的是求每个时间层流体体积函数 f 在每个单元的值 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. 控制方程(3)的有限差分半离散化格式为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{-1}{\Delta x}\left(\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{F}_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{1}{\Delta y}\left(\hat{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{G}_{i,j-\frac{1}{2}}\right).$$

数值通量 $\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j}$, $\hat{G}_{i,j+\frac{1}{2}}$ 根据相邻单元的信息计算得到,下面只介绍 $\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j}$ 的计算, $\hat{G}_{i,j+\frac{1}{2}}$ 可类似得到,并且下文描述中省去 $\hat{F}_{i+\frac{1}{2},j}$ 中和 y 有关的下标. 要构造具有 $(2k-1)$ 阶精度的 WENO 格式,需要用到 k 个可选模板 $S_r(i) = \left\{x_{i-r}, \cdots, x_{i-r+k-1}\right\}$, $r = 0, \cdots, k-1$ 上的函数值 F_i. 本文采用的是五阶 $(k=3)$ 精度的 WENO 有限差分格式[8],接下来简单介绍该格式的重构过程.

五阶精度的 WENO 格式是对 3 个模板上的数值通量 $\hat{F}^{(r)}_{i+\frac{1}{2}}$ 的一个凸组合:

$$\hat{F}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r \hat{F}^{(r)}_{i+\frac{1}{2}}.$$

其中:

$$\hat{F}^{(0)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}F_i + \frac{5}{6}F_{i+1} - \frac{1}{6}F_{i+2},$$

$$\hat{F}^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}F_{i-1} + \frac{5}{6}F_i + \frac{1}{3}F_{i+1},$$

$$\hat{F}^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}F_{i-2} - \frac{7}{6}F_{i-1} + \frac{11}{6}F_i.$$

加权因子为非线性权 ω_r,它满足 $\omega_r \geqslant 0$, $\sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1$,并且有:

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r}, \quad \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}.$$

其中,ε 是很小的正数,为了避免分母为零,本文中取 $\varepsilon = 10^{-6}$. d_r 为线性权,

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10}.$$

仅用线性权对数值通量 $\hat{F}^{(r)}_{i+\frac{1}{2}}$ 进行组合,即可使 $\hat{F}_{i+\frac{1}{2}}$ 在光滑解处达到五阶精度. β_r 为光滑因子:

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(F_i - 2F_{i+1} + F_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3F_i - 4F_{i+1} + F_{i+2})^2,$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(F_{i-1} - F_{i+1})^2,$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(F_{i-2} - 2F_{i-1} + F_i)^2 + \frac{1}{4}(F_{i-2} - 4F_{i-1} + 3F_i)^2.$$

光滑因子可以衡量数值解的陡度和光滑程度[9],避免因线性权产生的强烈震荡.

考虑迎风效应,采用一阶 Local Lax-Friedrich (LLF)数值流通量进行通量分裂:

$$F^{\pm}(f) = \frac{1}{2}\left(F(f) \pm \alpha f\right).$$

其中,$\alpha = \max_{f\in[f_L,f_R]} \left| F'(f) \right|$. 将上述的 WENO 重构过程分别对 $F^{\pm}$ 进行计算.

方程(3)左端的时间离散采用四阶的 Runge-Kutta 离散格式. 为了满足稳定条件,本文采用自适应时间步长,时间步长的选取和 CFL 条件数及网格的大小有关,本文取 CFL 条件数为 0.6.

3 数值实验
Numerical tests

接下来用本文模型追踪剪切流场和旋转流场下的运动界面. 一般来说,运动界面的捕捉方法应当是高精度数值方法,求解流体体积方程时可以不需要对界面进行构造,运动界面的轮廓线可以由界面的几条等值线获得[6],因此本文不进行界面重构.

3.1 剪切速度场

用本文方法模拟剪切速度场的数值试验,二维剪切流场:

$$u(x,y) = \pi\cos\left(\pi(x-x_0)\right)\sin\left(\pi(y-y_0)\right);$$

$$v(x,y) = -\pi\sin\left(\pi(x-x_0)\right)\cos\left(\pi(y-y_0)\right).$$

计算区域为 $[0,1]\times[0,1]$,取 $(x_0,y_0)=(0.5,0.5)$,初值界面为圆心在(0.5,0.3),半径为 0.2 的圆周. 将计算区域剖分为 200×200 个正方形网格. 用本文方法分别计算到 $t=1.0$ s 和 $t=2.0$ s 后,再以此结果为初值,将速度反号,分别反剪切到 $t=1.0$ s和 $t=2.0$ s,结果如图 1 所示.

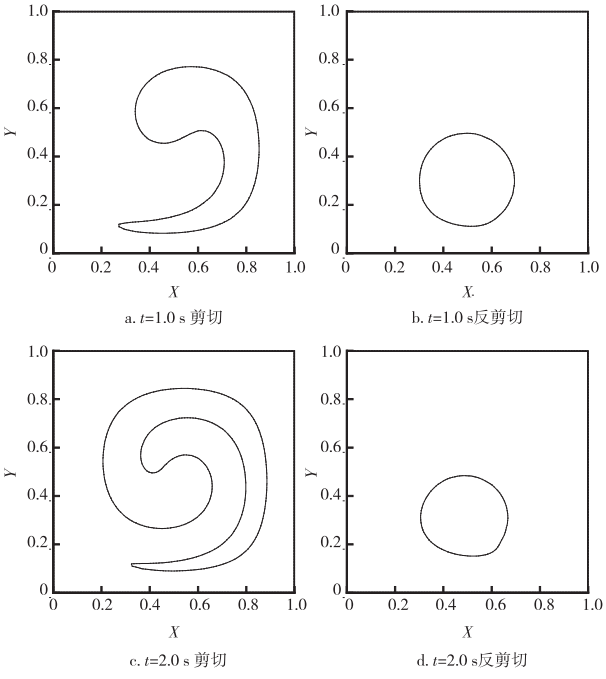


图 1 剪切速度场剪切及反剪切数值结果

Fig. 1 The results of shear and reverse shear of the shear velocity profiles

从图 1 可以看出,本文采用的运动界面捕捉法得到了很好的结果,并且对于其反转后的结果,界面的锐利情况和初始值几乎一样,特别是对 $t=1.0$ s 的反剪切. 因此在剪切速度场中,用 WENO 有限差分模型捕捉运动界面是可行的.

3.2 旋转速度场(Zalesak 问题)

考虑旋转流场:

$$u(x,y) = -\pi(y-y_0),$$

$$v(x,y) = \pi(x-x_0).$$

计算区域为 $[0,1]\times[0,1]$,取 $(x_0,y_0)=(0.5,0.5)$,初值界面为有缺口的圆周. 网格剖分情况同剪切速度场问题. 用本文方法分别计算 $t=0.5$ s,$t=1.0$ s,$t=1.5$ s 和 $t=2.0$ s 结果依次如图 2 所示.

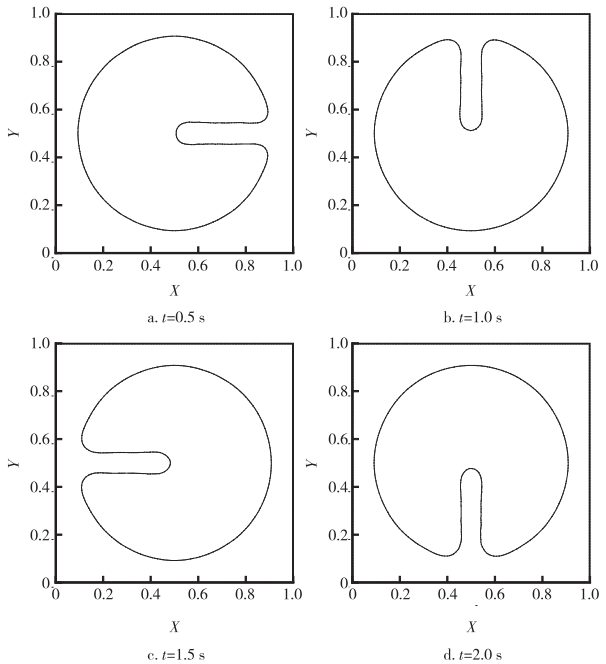


图 2 旋转速度场数值结果

Fig. 2 The results of the Zalesak problem

从图 2 可以看出,在旋转速度场中,本文模型得到了很好的结果,同其他学者在矩形网格剖分下的模拟结果非常近似[6].

4 结论
Conclusion

本文基于高阶高分辨率的 WENO 有限差分格式给出了有效的高精度 VOF 运动界面捕捉方法. 针对 VOF 方程,分别用五阶精度的 WENO 有限差分格式离散 VOF 函数的空间导数;用 Local Lax-Friedrichs 作为数值流通量;采用四阶 TVD Runge-Kutta 方法离散时间导数,通过编程实现,建立了运动界面捕捉模型. 最后用该方法对剪切速度场和旋转速度场进行模拟,计算结果表明该模型对实际运动界面追踪有较好的适用性和精确性,并且具有高精度和高分辨率.

参考文献
References

[1] Shen Y M, Ng C O, Zheng Y H. Simulation of wave propagation over a submerged bar using the VOF method with a two-equation k: turbulence modeling[J]. Ocean Engineering, 2004, 31(1): 87-95
[2] Lörstad D, Fuchs L. High-order surface tension VOF-model for 3D bubble flows with high density ratio[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 200(1): 153-176
[3] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid(VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 39(1): 201-225
[4] Youngs D L. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion[C]// Morton K W, Baincs M J. Numerical Methods for Fluid Dynamics. New York: Academic Press, 1982: 273-285
[5] Ubbink O, Issa R I. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 153(1): 26-50
[6] 刘儒勋,刘晓平,张磊,等. 运动界面的追踪和重构方法[J]. 应用数学和力学,2004,25(3):279-290
LIU Ruxun, LIU Xiaoping, ZHANG Lei, et al. Tracking and reconstruction methods for moving-interfaces[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(3): 279-290
[7] Ji C N, Shi Y. Application of the VOF method based on unstructured quadrilateral mesh[J]. Journal of Marine Science and Application, 2008, 7(1): 24-32
[8] Balsara D S. Divergence-free reconstruction of magnetic fields and WENO schemes for magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(14): 5040-5056
[9] Zahran Y H. An efficient WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 212(1): 37-50
[10] Arùndiga F, Belda A M, Mulet P. Point-value WENO multiresolution applications to stable image compression [J]. Journal of Scientific Computing, 2009, 43(2): 158-182

Fifth-order WENO finite difference method for tracking the moving-interfaces

LU Changna[1] CHENG Bing[2]
1 School of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044
2 School of Sciences and Information Science, Qingdao Agricultural University, Qingdao 266109

Abstract A method of high order accurate resolution is proposed to track moving-interface using VOF, the fifth order WENO scheme for space discretization, the local Lax-Friedrichs numerical flux and fourth order Runge-kutta method for time discretization are used in the methods for tracking the moving-interfaces. A high-resolution method is proposed to track moving surface using VOF (Volume Of Fluid). The finite difference scheme of fifth order high-accuracy and high-resolution WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) is established to discretize space derivative of VOF. The fourth order Runge-kutta method is employed to discretize time derivative, with the local Lax-Friedrichs as numerical flux. Then the numerical tests are performed in the Zalesak and the shearing flows problems. The results show that the method is effective and feasible for the tracking of the moving-interface.

Key words VOF; WENO scheme; finite difference method; moving-interface