文章编号:1674-7070(2009)03-0199-05

涡轮机二维叶栅形状的数值计算

梁志勇[1]　张根宝[1]

摘要

对定常正问题进行研究,在变分原理的基础上,用有限元方法对叶栅进行了数值计算. 将翼型 NACA0012 和 NACA 2412 作为计算对象,给出翼型的形状,计算出表面速度分布,之后与标准的速度分布进行比较. 结果表明理论正确,方法可行.

关键词

速度分布;变分原理;有限元方法;数值模拟

中图分类号 TK471

文献标志码 A

0　引言

Introduction

从 20 世纪 50 年代至今,以吴仲华教授为首的我国学者在叶轮机正、反问题上开拓了一系列完整、系统的理论方法,处于国际前沿水平,而在叶轮机反问题的数值求解上,西方国家虽然起步较晚(大约在 20 世纪 80 年代),但他们凭借其多年的研究积累,已经走在了前面.

对同一问题用不同的方法处理,可以得到 4 类问题:正问题、反问题、杂交问题和优化问题. 表 1 从概念上列出了叶栅气动问题的分类.

表 1　叶栅流动问题分类

Table 1　Classification of cascade flow problems

	问题类型	给定条件	要求的内容
1	正	叶栅几何形状	速度场
2	反	表面速度分布	叶栅几何形状
3	杂交	部分几何形状、部分流动条件	剩余几何形状和流场
4	优化	目标函数、设计不等式约束	最佳叶栅几何形状和流场

很显然,不同的分类方法产生不同的分类结果. 经过多年的发展,比利时冯·卡门研究机构将叶轮机反问题在解法上进行了分类[1]:位势方法、通量方法、欧拉方法. 可以看出,这种分类是根据控制方程的形式进行的.

本文对定常正问题进行了研究. 在变分原理的基础上,用有限元方法对叶栅进行了数值计算,将翼型 NACA0012 和 NACA2412 作为计算对象,给出翼型的形状,计算出表面速度分布,之后与标准的速度分布进行比较.

1　定常不可压缩流动的变分原理

Variational principle of the steady incompressible flow

考虑到正问题遵循的运动方程和叶面边界条件,二维势流无量纲基本控制方程为

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{1}$$

$$\phi_x = u, \phi_y = v, \tag{2}$$

收稿日期 2009-05-28

资助项目 国家自然科学基金(ZX200506000329)

作者简介

梁志勇,男,博士,副教授,主要研究计算流体力学. zhyliang@ dhu. edu. cn

1　东华大学　理学院,上海,201620

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(u^2+v^2)=B. \tag{3}$$

其中:u、v 为 x、y 方向的分速;ρ、p、ϕ 分别为密度、压力和速度势;B 为 Bernoulli 常数.

这里 u、v、ρ 和 p 分别为无量纲流体沿 x 方向速度、沿 y 方向速度、密度和压力;U_∞、ρ_∞ 分别为无穷远处来流速度和密度. 二维机翼绕流如图 1 所示.

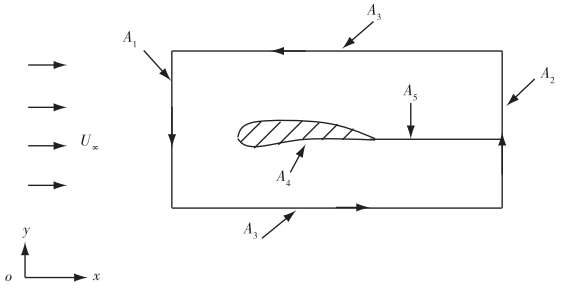


图 1　二维机翼绕流

Fig. 1　Flow around 2-D airfoil

边界条件:

1) 进、出口 A_1 和 A_2 上,$u=\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\mathrm{pr}}=1$,下标"$_{\mathrm{pr}}$"表示预先给定.

2) 远场 A_3 上和翼面 A_4 上,$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$.

3) 割缝 A_5 上,若是对称翼型则 $\Delta\phi=0$;若是非对称翼型则 $\Delta\phi=\Gamma$,这里 Γ 为环量.

以式(1)作为欧拉方程,式(2)作为约束,有

$$-\iint_{(A)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\phi\mathrm{d}A=$$
$$\iint_{(A)}\left(u\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)+I_b=$$
$$\iint_{(A)}(u\delta u+v\delta v)\mathrm{d}A+I_b=$$
$$\frac{1}{2}\delta\iint_{(A)}(u^2+v^2)\mathrm{d}A+I_b.$$

其中 I_b 是边界积分项. 于是得变分泛函

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\iint_{(A)}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{(A_1)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\mathrm{pr}}\phi\mathrm{d}s, \tag{4}$$

对式(4)取变分,可以得到

$$\delta J=-\iint_{(A)}\nabla^2\phi\cdot\delta\phi\mathrm{d}A+\int_{(A_1,A_2)}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\mathrm{pr}}\right]\delta\phi\mathrm{d}s+\int_{(A_3)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\delta\phi\mathrm{d}x+\int_{(A_4)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\delta\phi\mathrm{d}s. \tag{5}$$

由 $\delta J=0$ 得 J 的极值必要条件组欧拉方程:

$$\nabla^2\phi=0.$$

自然边界条件:

1) 进、出口 A_1 和 A_2 上,$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\mathrm{pr}}$;

2) 远场 A_3 上和翼面 A_4 上,$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$.

对于非对称机翼在尾缘上要求满足 Kutta[1-2] 条件.

2　用有限元对泛函进行离散

Functional divergence by means of the finite element method

对式(5)采用4 节点等参单元,可把各个分量用相同的插值函数 N_i 来表示(设面积坐标分别为 ξ、η)

$$\begin{cases}\phi(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)\phi_i,\\ x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}(\xi,\eta)x_i,\\ y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}(\xi,\eta)y_i.\end{cases} \tag{6}$$

其中:$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi^i\xi)(1+\eta^i\eta)$,$i=1,2,3,4$;$(\xi^i,\eta^i)$ 为单元在计算平面中第 i 个顶点的坐标;(x_i,y_i) 为单元在物理平面中第 i 个顶点的坐标;ϕ_i 为第 i 个顶点处的势函数.

等参坐标系与直角坐标系的转换 Jacobian 矩阵为 $[J_a]=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$.

对 4 节点等参元,有

$$-\iint_{(A^e)}\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}\frac{1}{|J_a|}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial N_m}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial N_n}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial N_n}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\left(\frac{\partial N_m}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial N_m}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial N_n}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial N_n}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\phi_m^e\delta\phi_n^e-\int_{(A_1^e,\,A_2^e)}\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{\mathrm{pr}}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta\delta\phi_n^e=0.$$

由上式可以得到单元上的方程组

$$A_{nm}^e\phi_m^e=B_n^e. \tag{7}$$

式中:

$$A_{nm}^{(e)}=\iint_{(A^e)}\frac{1}{|J_a|}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial N_m}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial N_n}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\right.\right.$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\Big) + \Big(\frac{\partial N_m}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_m}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\Big)\Big(\frac{\partial N_n}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_n}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\Big)\Big]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta;$$

$$B_n^e = -\int_{(A_1^e,\ A_2^e)} \sum_{n=1}^{4}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big)_{\mathrm{pr}}\Big[\Big(\frac{\partial x}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial \eta}\Big)^2\Big]^{1/2}\mathrm{d}\eta.$$

在 A_1 和 A_2 边界上:进口 $\Big(\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big)_{\mathrm{pr}} = -1$;出口 $\Big(\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big)_{\mathrm{pr}} = 1$.

由总体编号与局部编号的对应关系,再由布尔关系进行总体合成,得到总体方程组

$$A_{ij}\phi_j = B_i. \tag{8}$$

3 计算实例

Examples of numerical calculation

对二维定常流动,本文取两种翼型进行了计算,对称翼型 NACA0012 和非对称翼型 NACA2412. NACA 是美国国家航空咨询委员会的缩写(现已改名为美国国家宇航局,缩写 NASA). NACA 翼型是早期发表的翼型系列,被广为应用.

本文计算域机翼弦长方向取 6(无量纲的弦长取 1);垂直弦长 L_c 方向取 3. 坐标原点位于翼弦上,离前缘 2.5 处. 计算格点:x 方向取 35,单方向翼面上给定 19 个点,于是翼表面上格点共有 36;y 方向取 27. 网格划分示意如图 2 所示.

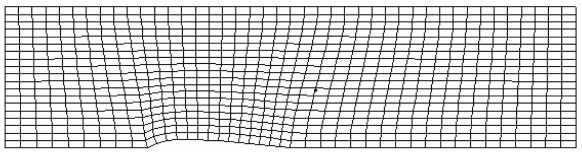


图 2 网格划分示意

Fig. 2 Grids diagram

对靠近机翼端部及翼表面的网格进行加密,网格加密规则:设 1 条线段上有 N 个点,I 表示线段上的某个点,N_1 表示线段上加密的起点,于是有加密公式

$$f(I) = a \times \mathrm{abs}\Big[\big((I - N_1)/(N-1)\big)\Big]^{\mathrm{POWER}},$$

$$a = (N-1)^{\mathrm{POWER}}\Big/\Big((N-N_1)^{\mathrm{POWER}} + (N_1-1)^{\mathrm{POWER}}\Big).$$

式中:abs 表示对其后括弧中的项取绝对值;POWER 是大于 0 的正数,当取 1 时,表示不加密,当小于 1 时,表示从 N_1 到 N 由密至稀,反之当其大于 1 时,表示从 N_1 到 N 由稀至密.

由于解不可压缩定常流动导出的位势方程是线性的,所以求解不难,计算时间短. 当解非对称翼型为满足 Kutta 条件而进行调整时,所需时间大约 15 s. 本计算所用计算机是 Celeron 2.66 GHz,内存512 M.

4 计算中的几个问题

A few problems in numerical calculation

4.1 关于自然边界条件引起的位势 ϕ 的不确定性

由于条件都是第 2 类边界条件 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$,而控制方程为椭圆型的,由此将引起位势函数 ϕ 的不确定性. 这些不同的位势函数 ϕ 相差一个常数,故在计算时将指定一个位置的 ϕ 值,本文指定机翼前缘点的 ϕ 为 1.0.

4.2 关于 Kutta 条件的处理

最初提出的 Kutta 条件是针对有尖角形尾缘的平面翼型[2-3],它是人们为了使理想流体模型的解能够较好模拟出实际流体的绕流情形而人为地加进来的一个定解条件,即在叶型后尖点处的流速保持有限值.

计算过程中,调整机翼上下翼面与尾部尖点的势函数以改变绕机翼的环量,最终达到尾部尖点的速度相等,以满足 Kutta 条件.

对于绕流有环量的翼型,绕翼型 1 周,速度位势场有 1 个跳跃,需要引进割缝边界条件,使得在割缝的两侧存在位势差,其值和绕翼型 1 周的环量相等. 由于位势差事先并不知道,需要通过逐步迭代来求得. 方法如下:

1) 假设一位势差 $\Delta\phi_2$,求解位势函数.

2) 求解速度场,得到翼型上下对应点上的速度差 ΔW_2. 如果是第 1 次迭代,则把 $\Delta\phi_2$ 和 ΔW_2 分别赋给 $\Delta\phi_1$ 和 ΔW_1,并以位势差 $\Delta\phi_2 = 1.5\Delta\phi_1$ 代入割缝边界条件,求解位势函数,再计算翼型上下的速度差 ΔW_2. 在这里选取的对应点为靠近尾缘的两点,它们分别在翼型的吸力面和压力面上,具体位置可以任意给定.

3) 如果速度差 ΔW_2 小于某个阈值或迭代进行了一定次数则停止迭代,否则转 4).

4) 把上一次计算得到的位势差 $\Delta\phi_1$ 和速度差 ΔW_1 与本次的位势差 $\Delta\phi_2$ 和速度差 ΔW_2 代入下式:

$$\Delta\phi_3 = \Delta\phi_1 - (\Delta\phi_2 - \Delta\phi_1)\Delta W_1/(\Delta W_2 - \Delta W_1).$$

至此,得到下一次迭代所用的位势差 $\Delta\phi_3$. 把 $\Delta\phi_2$ 和 ΔW_2 分别赋给 $\Delta\phi_1$ 和 ΔW_1,把 $\Delta\phi_3$ 赋给 $\Delta\phi_2$,再次求解位势函数,回到步骤 2). 割缝位势差迭代过程如图 3 所示.

4.3 收敛精度问题

对于非对称机翼,在 Kutta 条件迭代过程中计算势函数 ϕ,上下 2 次求出的 ϕ 当满足一定的精度要求时[6-7],计算便结束.

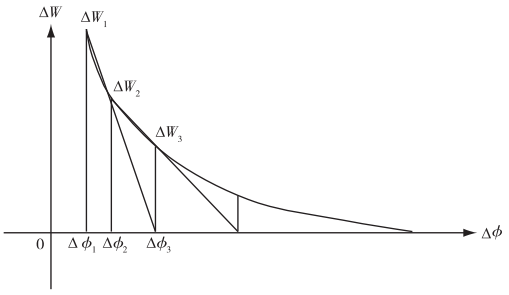


图 3　割缝位势差迭代过程

Fig. 3　Iteration process of geopotential difference of the cutting crack

即 $\left|\dfrac{\phi^n-\phi^{n-1}}{\phi^n}\right|<\varepsilon_\phi$，$\phi^{n-1}$、$\phi^n$ 分别为上、下 2 步计算的 ϕ 值.

计算精度 ε_ϕ 取 10^{-6}. 本章计算 NACA2412 时，时间约需 35 s.

5　小结

Summary

图 4 是标准的 NACA0012 机翼形状，图 5 是相应的机翼表面速度分布，它们主要是用来与本文计算的结果进行比较.

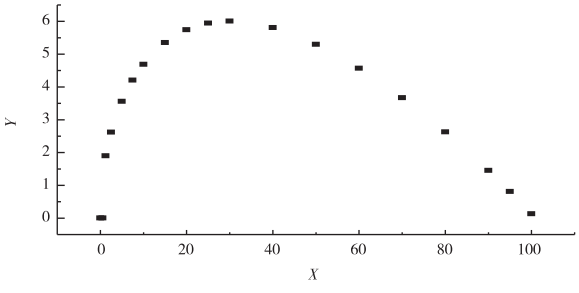


图 4　NACA0012 机翼形状(上半翼,标准解)

Fig. 4　Half foil shape of NACA0012 (the upper half,standard result)

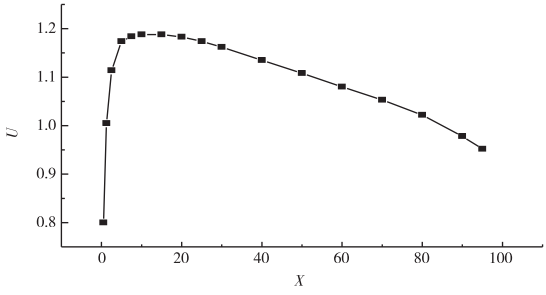


图 5　NACA0012 机翼表面速度分布(标准解)

Fig. 5　Surface velocity distribution of NACA0012(standard result)

图 6 是本文所取的 NACA0012 形状，图 7 是本文计算的速度与标准数据进行的比较. 可以看出，本文结果与标准速度分布符合得很好，由此可以断定本文所用的程序是正确的.

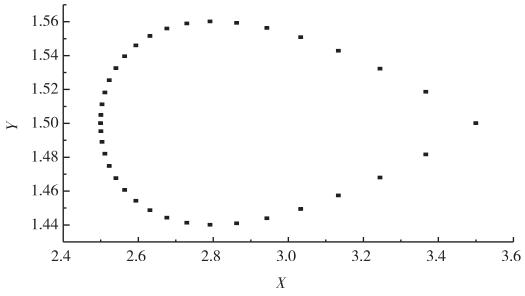


图 6　NACA0012 机翼形状(本文解)

Fig. 6　Foil shape of NACA0012(present result)

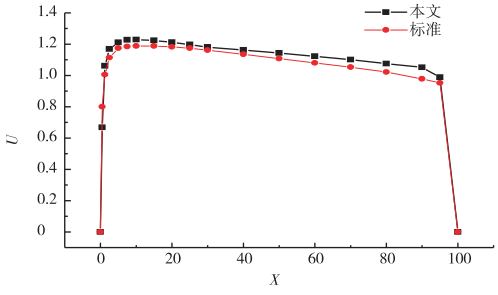


图 7　NACA0012 机翼表面速度分布比较

Fig. 7　Comparison of surface velocity distribution of NACA0012

图 8 是本文所取的 NACA2412 机翼形状，图 9 是相应的机翼吸力面和压力面速度分布[4-5].

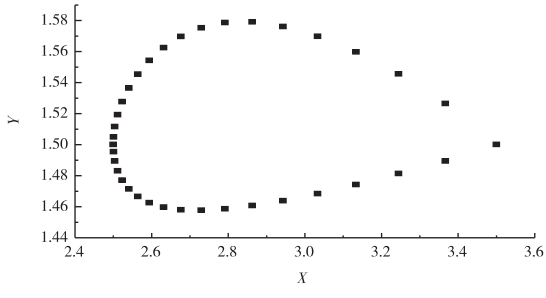


图 8　NACA2412 机翼形状(本文解)

Fig. 8　Foil shape of NACA2412(present result)

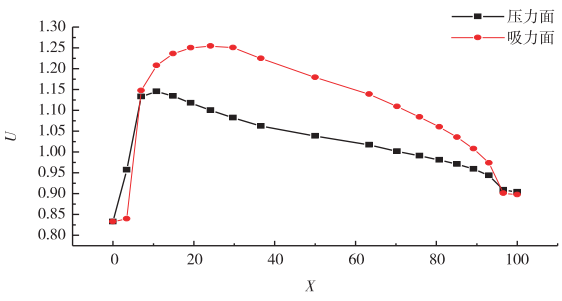


图 9　NACA2412 机翼表面速度分布

Fig. 9　Surface velocity distribution of NACA2412(present)

参考文献

References

[1] Yiu K F C. Computational methods for aerodynamic shape design [J]. Maths Comput Modelling,1994,20(12):3-29

[2] 刘希云,赵润祥. 流体力学中的有限元与边界元方法[M]. 上海:上海交通大学出版社,1993
LIU Xiyun, ZHAO Runxiang. Finite element and boundary element methods in fluid dynamics[M]. Shanghai: Shanghai Jiao-Tong University Press,1993

[3] 王献孚. 船用翼理论[M]. 北京:国防工业出版社,1998
WANG Xianfu. Theories of ship wings[M]. Beijing: Defense Industry Press,1998

[4] LIU Gaolian. Advances in research on inverse and hybrid problems of turbomachinery aerothermal dynamics in China[J]. Inverse Problems in Engineering,1995(2):1-27

[5] LIU Gaolian. Variational principles(VP) & generalized VP for fully 3-D transonic flow with shocks in a turborotor: Pt Ⅰ Poten tial flow[J]. Acta Mech,1992,92:117-130

[6] XIE Xiaomin, LIU Chunho. Characteristics of air exchange in a street canyon with ground heating[J]. Atmospheric Environment, 2006,40:6396-6409

[7] XI Xianxiang, LIU Chunho. Development of a k-ε model for the determination of air exchange rates for street canyons[J]. Atmospheric Environment,2005,39:7285-7296

Numerical simulation of the 2-dimension cascade shape of the turbine

LIANG Zhiyong[1]　ZHANG Genbao[1]

1　College of Science, Donghua University, Shanghai　201620

Abstract　The design of a cascade is a hot point in fluid dynamics. The steady positive problem of the cascade is studied in this paper. The objects are the wing types NACA0012 and NACA2412. At first the shapes of the wing cascades are given, and the surface velocity distribution of the projects is calculated. Then the numerical simulation of the cascades is conducted by means of the finite element method(FEM) based on a variational principle. In contrast to the standard velocity distribution, the numerical results indicate that the present method is powerful and can be employed for practical hydrofoil design.

Key words　velocity distribution; variational principle; finite element method; numerical simulation